

Chapitre 9 – Loi Binomiale

I/ Rappel de Première : espérance d'une variable aléatoire

On étudie la connexion à l'ENT, un jour donné, par les élèves d'une classe de Terminale STMG. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de connexions ce jour-là.

Nombre de connexions k	0	1	2	3	4	total
$P(X = k)$	0,38	0,35	0,15	0,09	0,03	1

L'espérance de X est : $E(X) = 0 \times 0,38 + 1 \times 0,35 + 2 \times 0,15 + 3 \times 0,09 + 4 \times 0,03$

$$E(X) = 1,04$$

Interprétation : **en moyenne**, les élèves se sont connectés 1 fois ce jour-là.

II/ Rappel de Première : schéma de Bernoulli

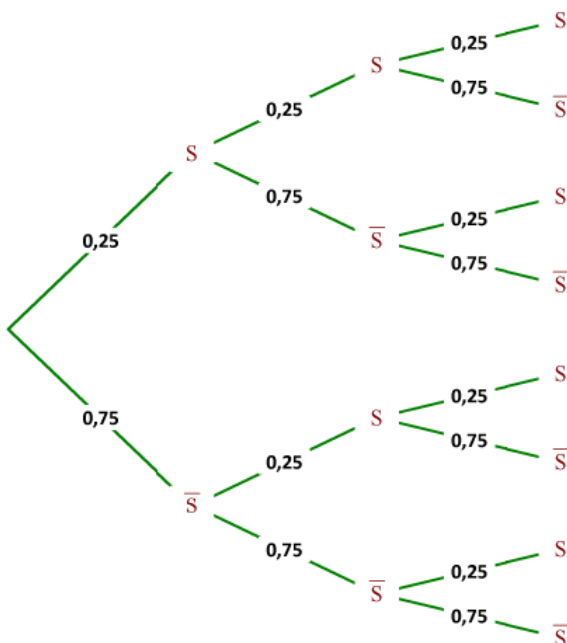
On lance un dé cubique truqué : celui-ci a **25 %** de chance de tomber sur la face n°6.

► On lance le dé : on ne s'intéresse pas à la face sur laquelle retombe le dé (il y aurait dans ce cas 6 issues différentes) mais on s'intéresse uniquement à savoir s'il retombe, ou non, sur la face n°6 (il n'y a alors que 2 issues : le dé tombe sur la face n°6, ou pas). Lorsque le dé tombe sur la face n°6, on appelle cet événement **succès**, qu'on note S . Sinon, on appelle cet événement **échec**, qu'on note $\bar{S}$.

► On lance le dé **3 fois** de suite : on va alors représenter la situation par un arbre pondéré à **3 niveaux**

→ c'est ce qu'on appelle le **schéma de Bernoulli**, de paramètres $n = 3$ et $p = 0,25$:

X : variable aléatoire égale au nombre succès



III/ Coefficient binomial

Définition

On appelle **coefficient binomial** le **nombre de chemins** permettant de compter le nombre de réalisations de l'événement $X = k$ lorsque l'expérience est **répétée n fois**.

On le note : $\binom{n}{k}$ qui se lit « **k parmi n** ».

Exemple

Par rapport à l'exemple précédent avec le dé truqué, sur les 8 chemins au total, il en existe 3 qui permettent la réalisation de l'événement $X = 2$.

Comment compter le nombre de chemins lorsqu'une expérience est répétée n fois ?

► Lorsque n est petit ($n = 2, 3$ ou 4) :

→ il suffit de **construire l'arbre**

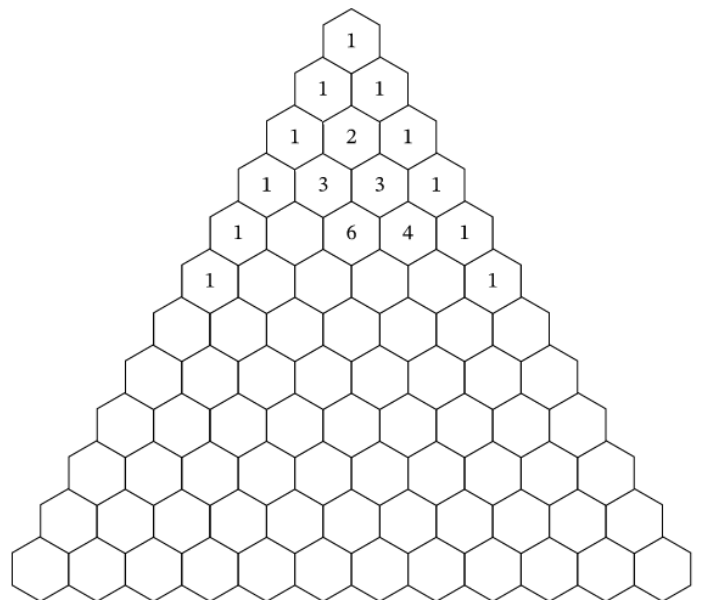
► Lorsque n n'est pas trop grand ($n \leq 10$) :

→ on peut utiliser le principe du **triangle de Pascal**

représentation en tableau

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1		6	4	1						
5	1					1					
6											
7											
8											
9											
10											

représentation en triangle



IV/ Loi binomiale

Définition

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de succès.

La loi de probabilité de X est alors appelée loi binomiale de paramètres n et p .

Exemples

- On lance une pièce équilibrée 20 fois de suite.

On note X le nombre de fois où la pièce est tombée sur le côté PILE.

Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$

- Au tir à l'arc, un archer sait qu'il atteint le cœur de la cible dans 92 % des cas.

Il réalise une partie composée de 5 volées de 3 flèches.

On note Y le nombre de fois où la flèche a atteint le cœur de la cible.

Alors Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,92$

Formule de la loi binomiale

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors la probabilité de l'événement « $X = k$ » (avec $0 \leq k \leq n$) est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n - k}$$

nombre de chemins
menant à k succès

sur l'un des chemins menant à
l'obtention de k succès, il y a k branches
qui portent la probabilité p

et sur ce même chemin,
il y a $n - k$ branches
de probabilité $1 - p$
(on a $n - k$ échecs)

Exemples

- avec la pièce équilibrée

Quelle est la probabilité que la pièce tombe exactement 12 fois sur la côté PILE ?

$$\begin{aligned} P(X = 12) &= \binom{20}{12} \times 0,5^{12} \times (1 - 0,5)^{20 - 12} \\ &= 125\,970 \times 0,5^{12} \times 0,5^8 \\ &\approx 0,120 \end{aligned}$$

- avec l'archer

Quelle est la probabilité que l'archer atteigne exactement 13 fois le cœur de cible ?

$$\begin{aligned} P(X = 13) &= \binom{15}{13} \times 0,92^{13} \times (1 - 0,92)^{15 - 13} \\ &= 105 \times 0,92^{13} \times 0,08^2 \\ &\approx 0,227 \end{aligned}$$

Utilisation de la calculatrice ► <https://www.youtube.com/watch?v=T01ym3lJCQo>

Espérance d'une loi binomiale

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Alors $E(X) = n \times p$

Exemples

- ▶ pour une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$ alors $E(X) = 24$
- ▶ pour une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,4$ alors $E(X) = 6$
- ▶ pour une loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,7$ alors $E(X) = 84$
- ▶ pour une loi binomiale de paramètres $n = 33$ et $p = 0,61$ alors $E(X) = 33 \times 0,61 = 20,13$
- ▶ pour une loi binomiale de paramètres $n = 280$ et $p = 0,22$ alors $E(X) = 280 \times 0,22 = 61,6$

Exercices d'application

35 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(9; 0,3)$.

1. Sachant que $\binom{9}{2} = 36$, calculer $P(X = 2)$ à 10^{-3} près.
2. Sachant que $\binom{9}{4} = 126$, calculer $P(X = 4)$ à 10^{-3} près.

44 En moyenne, 10 % des élèves ont une calculatrice dont les piles (ou la batterie) sont vides.

On considère une classe de 35 élèves, dont tous les élèves ont une calculatrice.

On note X la variable aléatoire associée au nombre de calculatrices aux piles déchargées dans cette classe. Le nombre de calculatrices en circulation étant élevé, on considère cet échantillon de 35 calculatrices comme un tirage avec remise.

1. Quelle loi suit X ?
2. Calculer $P(X = 0)$ (arrondir à 10^{-3}) et interpréter le résultat.
3. Quelle est la probabilité que 5 élèves ou moins aient une calculatrice dont les piles sont déchargées (arrondir à 10^{-3}) ?
4. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

47 Un examen oral est organisé de la sorte : la liste des 100 sujets possibles est publiée 6 mois avant le concours, pour laisser aux candidats le temps de se préparer.

Le jour de l'examen, chaque candidat tire au hasard 3 sujets parmi les 100 sujets proposés et décide lequel des trois il présentera au jury.

Le nombre de sujets étant élevé, on assimile ce tirage à un tirage avec remise.

Un candidat a préparé 70 sujets. Soit X la variable aléatoire qui associe à son tirage le nombre de sujets qu'il a préparés parmi les 3 sujets tirés.

1. Quelle loi suit X ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'ait préparé aucun des 3 sujets tirés (arrondir le résultat à 10^{-3}) ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait préparé au moins un des trois sujets tirés (arrondir le résultat à 10^{-3}) ?
4. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat.

36 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(28; 0,01)$.

Calculer $P(X = 1)$ à 10^{-2} près.

37 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(14; 0,9)$.

Calculer $P(X \geq 13)$ à 10^{-2} près.

48 Un test pour le permis côtier est un QCM comportant 30 questions indépendantes, pour chacune desquelles 3 réponses sont proposées dont une seule est correcte. Pour réussir le test, il faut répondre correctement à au moins 25 questions.

1. Un candidat décide de répondre au hasard. On note X le nombre de bonnes réponses obtenues.

- a. Quelle loi suit X ?
- b. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, qu'il réponde correctement à au moins la moitié des questions ?
- c. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, qu'il réussisse le test ?
- d. Si le candidat répondait à un grand nombre de QCM de la même façon, combien de bonnes réponses obtiendrait-il en moyenne à chaque QCM ?

2. On considère maintenant que le candidat est bien préparé et répond correctement à 80 % des questions.

- a. Recommencer la question 1. avec cette nouvelle donnée.
- b. Le candidat a-t-il raison de s'être préparé ?

54 Ariane 5 est un lanceur de l'Agence spatiale européenne conçu pour placer des satellites en orbite. Exactement 100 vols ont été réalisés entre 1996 et 2019, dont seulement cinq échecs ou échecs partiels. Quatre vols sont prévus en 2020 et 2021. On note X le nombre de vols réussis parmi ces quatre projets de lancements.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Quelle est la probabilité que seulement trois des quatre vols prévus soient réussis (à 10^{-3} près) ?
3. Quelle est la probabilité que les quatre vols soient réussis (à 10^{-3} près) ?
4. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter le résultat.